Иррациональные числа

Число называется *рациональным*, если оно представимо в виде дроби p/q, где числа p и q целые и $q \neq 0$. Множество рациональных чисел обозначается через $\mathbb{Q}$, таким образом, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Вещественные числа, не являющиеся рациональными, называются *иррациональными.*

1. Докажите иррациональность числа $\sqrt{2025}$.
2. Докажите иррациональность числа $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.
3. Докажите, что каждое рациональное число p/q представимо в виде конечной либо бесконечной периодической десятичной дроби, причём длина периода меньше q.
4. Докажите, что всякая бесконечная периодическая десятичная дробь является рациональным числом.

Сопряжённые числа

Пусть числа a и b рациональные, а d — натуральное число, не являющееся полным квадратом. Числа $a + b\sqrt{d}$ и $a - b\sqrt{d}$ называются *сопряжёнными.*

5. Докажите, что число вида $a + b\sqrt{d}$ однозначно определяет коэффициенты a и b (т. е. такое представление единственно).
6. Докажите, что, если $(a + b\sqrt{d})^n = A + B\sqrt{d}$, то $(a - b\sqrt{d})^n = A - B\sqrt{d}$.

Задачи

7. Докажите иррациональность числа $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.
8. Докажите иррациональность числа $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.
9. Найдите 1012-ую цифру после запятой числа $(2 + \sqrt{3})^{2024}$.
10. Докажите, что равенство $(x + y\sqrt{2})^2 + (z + t\sqrt{2})^2 = 5 + 4\sqrt{2}$ не может выполняться ни при каких рациональных x, y, z и t.
11. Докажите, что равенство $(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n$ не может выполняться ни при каких натуральных m и n.
12. Числа $x, y \in \mathbb{R}$ удовлетворяют равенству $x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1} = \frac{3}{4}$. Найдите все возможные значения выражения $\sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{y^2+1} + xy$.
13. Докажите, что для любых натуральных чисел m и n найдётся натуральное число k такое, что $(\sqrt{m} - \sqrt{m-1})^n = \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$.
14. Докажите, что $v_2(\lfloor(1 + \sqrt{3})^{2n+1}\rfloor) = n + 1$ для всех натуральных n.
15. **Теорема Дирихле.** Докажите, что для любых вещественного числа x и натурального числа n существуют такие целые числа a и b, $1 \leqslant b \leqslant n$, что $|x - \frac{a}{b}| < \frac{1}{bn}$.
16. Пусть α и β — положительные вещественные числа. Докажите, что каждое натуральное число ровно один раз встречается среди чисел $\lfloor\alpha\rfloor$, $\lfloor\beta\rfloor$, $\lfloor 2\alpha\rfloor$, $\lfloor 2\beta\rfloor$, $\lfloor 3\alpha\rfloor$, $\lfloor 3\beta\rfloor$, …, если и только если $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ и $\alpha, \beta \notin \mathbb{Q}$.